Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\log(1+x)\right)^{\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})}}$$

Risulta:

la base $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\log(1+x)\right) = 1$

l'esponente $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{3x} = +\infty$

$$\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{3x\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x} = +\infty \right)$$

Pertanto il limite proposto si presenta nella forma indeterminata 1^{∞}

Utilizziamo il limite notevole di Neper:

$$\text{se} \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\left(1+\log(1+x)\right)^{\frac{1}{\log(1+x)}}\right]^{\log(1+x)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})}}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\left(1+\log(1+x)\right)^{\frac{1}{\log(1+x)}}\right] = e$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log(1+x)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x}\cdot\frac{x\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})}\cdot\frac{3}{3} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot \frac{1}{3}$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1+\log(1+x)\right)^{\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen}(3x\sqrt{x})}} = e^{\frac{1}{3}}$$